II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

6 клас

1. У якому році народився норвезький математик Нільс Абель, якщо остання цифра року його народження на 2 більша за третю цифру і в 4 рази менша за другу цифру? Достатньо вказати відповідь.
2. Наручний годинник гнома Поспіхи щогодини тікає вперед на 2 хвилини, а наручний годинник гнома Повільняхи відстає щогодини на 1 хвилину. Вчора Поспіха і Повільняха виставили на своїх годинниках один і той самий правильний час. Коли вони прокинулися на наступний день, то годинник Поспіхи показував 8:20, а годинник Повільняхи 7:50. Який правильний час був виставлений на годинниках?
3. Лотерейний квиток має шестизначний номер. Квиток є виграшним, якщо сума будь-яких трьох його цифр дорівнює сумі трьох інших цифр. Іван купив два лотерейні квитки номери яких є послідовними числами. Обидва вони виявилися виграшними. На яку цифру закінчувався кожний придбаний Іваном квиток?
4. Четверо приятелів вирішили подарувати дівчатам квіти. Кожній із чотирьох дівчат подарували один букет. У всіх дівчат були різні квіти. Юрій цілий день не бачив Катерину і Марину. Дмитро не зміг купити букет троянд. Андрій не дарував квітів ні Олі, ні Марині. Георгій спочатку хотів подарувати букет Оленці або Катерині, але потім передумав. Ні Оленка, ні Оля не зустрічалися з Дмитром. Катерина так і не одержала свої улюблені мімози. Андрій не купував квітів, які починаються на букву «г». Ні Оленці, ні Олі не дарували троянд. Юрій не встиг купити гладіолуси. Георгій пам'ятав, що бачив у своїх друзів букети гвоздик і мімоз. Марина не отримала гвоздик і гладіолусів, на які вона сподівалася. Оленка хвалилася подрузі, що їй «не подарували цих дешевих мімоз». З'ясуйте букет яких квітів і від котрого хлопця одержала кожна дівчина.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв’язання 3 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

7 клас

1. У потягу 18 однакових вагонів. У деяких вагонах вільними є рівно половина місць, у деяких інших – третина місць, а в інших вагонах зайняті всі місця. При цьому у всьому потязі вільною є одна дев'ята всіх місць. У скількох вагонах всі місця зайняті?
2. У пробірку першого дня помістили один інопланетний вірус. На другий день кількість вірусів подвоїлася, на третій потроїлася порівняно з попереднім днем, на четвертий – збільшилася вчетверо, і так далі. Так тривало до 20-го дня включно, в який кількість вірусів збільшилася у 20 разів. Чи можна всі віруси, що утворилися у пробірці, розмістити в 21 пробірку порівну?
3. В селі Пряме всі будинки розташовані вздовж однієї прямої дороги. Аня, Богдан, Валя, Галя та Діма, будинки яких розташовані один за одним зліва направо відповідно, знайшли суму відстаней (в метрах) від свого будинку до будинків інших дітей. У Богдана вийшло 700 м, у Валі 600 м, у Галі 650 м. Яка відстань між будинками Богдана та Галі?
4. Уздовж прямолінійної ділянки кордону встановлено 15 стовпів. Біля кожного стовпа зловили кілька короткозорих шпигунів. Кожен із них чесно сказав, скільки інших шпигунів він бачив. Але будь-який шпигун бачив тільки тих, хто знаходився біля його стовпа та найближчих двох сусідніх стовпів. Чи можна за цими даними відновити чисельність шпигунів, спійманих біля кожного стовпа?
5. У кожній клітинці 1x1 квадрата розміром 5x5 провели рівно одну діагональ. Вершина клітинки вважається вільною, якщо вона не є кінцем жодної з проведених діагоналей. Знайдіть найбільшу можливу кількість вільних вершин.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв’язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

8 клас

1. Двоє учнів Андрій та Богдан живуть в одному будинку і навчаються в одній школі. Андрій вийшов на 5 хв раніше Богдана. Андрію потрібно 30 хв, щоб дістатись від дому до школи, а Богдану 20 хв. Скільки часу потрібно Богдану, щоб наздогнати Андрія?
2. Скоротіть дріб $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2b^2+ab+1}$ якщо $a + b - ab - 1 = 0$.
3. Дано трикутник ABC такий, що $AB > AC > BC$. Бісектриса кута, суміжного до кута BCA перетинає пряму AB в точці N, а бісектриса кута, суміжного до кута BAC перетинає пряму BC в точці M. Виявилось, що $AM = AC = CN$. Знайдіть кути трикутника ABC.
4. Чи існує таке натуральне число n, що $n^2 + S(n) = 99\dots98$ (99 дев'яток), де через $S(n)$ позначено суму цифр числа n?
5. 25 тенісистів зіграли турнір в одне коло (кожен зіграв з кожним рівно один раз). Виявилось, що серед будь-яких п'яти гравців є такий гравець, що виграв від усіх інших чотирьох гравців, та такий гравець, що програв всім іншим чотирьом гравцям. Доведіть, що якщо тенісист A виграв від тенісиста B, а тенісист B виграв від тенісиста C, то тенісист A виграв від тенісиста C.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

9 клас

1. Побудувати графік рівняння $|x| - 2|y| = 2$.
2. Для дійсних чисел x, y, z виконується рівність
$$x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = 1$$
Доведіть, що $xyz = 0$.
3. У гострокутному трикутнику ABC проведена медіана AM та висота BH. Пряма, яка перпендикулярна прямій AM, що проходить через точку M перетинає промінь HB в точці T. Виявилось, що $\angle MAC = 30°$. Доведіть, що $AT = BC$.
4. Для дійсних чисел a, b доведіть нерівність $(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$.
5. В таблиці $n \times m$ розташовано декілька фішок. Виявилось, що для будь-якої фішки кількість фішок в її рядку співпадає з кількістю фішок у її стовпчику. Доведіть, що кількість рядків дорівнює кількості стовпчиків, в яких є принаймні одна фішка.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

10 клас

1. Знайдіть хоча б одне чотиризначне число, що має таку властивість: якщо суму всіх цифр цього числа помножити на добуток усіх його цифр, то в результаті отримаємо 3990.
2. Ненульові числа x та y задовольняють нерівності $x^2 - x > y^2$ та $y^2 - y > x^2$. Який знак має добуток xy?
3. В опуклий чотирикутник ABCD вписано коло радіуса r. Доведіть, що діаметр кола не перевищує довжину відрізка, що сполучає середини сторін BC і AD.
4. Василь розклав картки з числами від 1 до 10 в ряд у деякому порядку. Потім для кожної пари сусідніх карток з числами x і y записав число $\frac{1}{x+y}$. Доведіть, що сума записаних Василем чисел більша за 0,75.
5. У царя вісім синів. Щоночі цар відправляє трьох із них стерегти золоті яблука від жар-птиці. Спіймати жар-птицю царевичі не можуть, тому звинувачують у цьому один одного. Через це жодні двоє з них ще раз у варту разом не ходять. Яку найбільшу кількість ночей може тривати вартування?

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

11 клас

1. Чи має від'ємні корені рівняння $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0$?
2. Функція f(x) визначена для всіх дійсних чисел, причому для будь-якого x виконуються рівності $f(x+2)=f(2-x)$ і $f(x+7)=f(7-x)$ Доведіть, що f(x) – періодична функція.
3. Коло, вписане у трикутник ABC, дотикається до сторони AC в точці D. Друге коло, що проходить через точку D, дотикається до променя BA в точці A і продовження сторони BC за точку C. Знайдіть відношення AD:DC.
4. Розв'яжіть рівняння $|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y = 0$.
5. Яку найменшу кількість клітинок можна зафарбувати на дошці розміром 8x9 так, щоб серед будь-яких п'яти поспіль клітинок по горизонталі, вертикалі чи діагоналі була зафарбована клітинка?

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено